AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

EHTİYATLARI BİR NEÇƏ MƏNBƏDƏN DOLDURULAN XİDMƏT SİSTEMLƏRİNİN RİYAZİ MODELLƏRİNİN YARADILMASI

İxtisas: 3338.01 – Sistemli analiz, idarəetmə və informasiyanın işlənməsi (modelləşdirmə və idarəetmə)

Elm sahəsi: Texnika elmləri

İddiaçı: **Ramil Ramiz oğlu Mirzəyev**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı - 2026

Dissertasiya işi Bakı Mühəndislik Universitetində yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: AMEA-nın müxbir üzvü,
texnika elmləri doktoru, professor
Ağası Zərbəli oğlu Məlikov

Rəsmi opponentlər:

AMEA-nın müxbir üzvü,
texnika elmləri doktoru
Ramiz Məhəmməd oğlu Alıquliyev

texnika elmləri doktoru, professor
Nailə Fuad qızı Musayeva

texnika üzrə fəlsəfə doktoru, dosent
Nazlı Əli qızı Həsənova

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyinin İnformasiya Texnologiyaları İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən FD 1.35 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA-nın həqiqi üzvü,
texnika elmləri doktoru, professor
_____ **Rasim Məhəmməd oğlu Əliquliyev**

Dissertasiya şurasının elmi katibi:
texnika elmləri doktoru, dosent
_____ **Zərifə Qasım qızı Cəbrayılova**

Elmi seminarın sədri:
texnika elmləri doktoru, professor
_____ **Nadir Bafadin oğlu Ağayev**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemləri (Queuing-Inventory System, QIS) kütləvi xidmət və ehtiyatların idarə edilməsi proseslərinin vahid model çərçivəsində birləşdirilməsi əsasında formalaşan sistemlərdir. Kütləvi xidmət sistemlərində (KXS) daxil olan sorğular (müştərilər) xidmət olunduqdan sonra sistemin heç bir resursunu (serverləri, sorğular üçün olan gözləmə yerlərini və s.) aparmırlar. Ehtiyatların idarə edilməsi sistemlərində isə xidmət stansiyası (serverləri) olmur (yəni xidmət zamanı sıfırdır) və bu səbəbdən sorğuların növbəsinin yaranması mümkün deyildir. Lakin bir sıra real xidmət sistemlərində (məsələn, logistika şəbəkələrində, material resurslarla təchizat zəncirlərində, yanacaqdoldurma stansiyalarında, onlayn mağazalarda, qan banklarında, pərakəndə ticarət sistemlərində və s.) sorğuların xidmət olunması üçün həm boş server, həm də sistemin müəyyən resursları (ehtiyatları) olmalıdır. Bu sistemlərdə sorğuların daxil olması anlarının, xidmət müddətinin və eləcə də sistemin ehtiyatlarla təchiz olunması müddətinin təsadüfi xarakter daşıması nəticəsində sorğuların növbəsi yaranır.

Öyrənilən QIS-lərin adekvat riyazi modellərinin qurulması üçün həm KXS, həm də ehtiyatların idarə edilməsi sistemləri nəzəriyyələrinin birgə istifadəsi zəruridir. Bu səbəblərdən son otuz ildə QIS-lər dünyanın müxtəlif ölkələrində bir çox alimlər tərəfindən intensiv şəkildə öyrənilir.

Mövcud ədəbiyyatın təhlili göstərir ki, tədqiqatların əksəriyyətində ehtiyatları yalnız bir mənbədən təmin (təchiz) edilən QIS modelləri öyrənilir. Real həyatda hər hansı gözlənilməz təbii və tibbi fəlakətlər nəticəsində (məsələn, zəlzələlər, yanğınlar, müharibələr, terror aktları, epidemiyalar və s.), eləcə də bəzən təchizatçının ehtiyatların qiymətlərini kəskin artırması nəticəsində konkret təchizatçıdan ehtiyatlarla təmin olunmaq mümkünsüz ola bilər. Bu baxımdan real QIS-lərin dayanıqlılığını artırmaq və riskləri azaltmaq üçün bir neçə təchizat mənbəyindən istifadə edilməsi vacibdir. Nəzəri və praktiki cəhətlərdən aktual olmasına baxmayaraq, çoxmənbəli QIS-lər mövcud ədəbiyyatda kifayət qədər tədqiq olunmamışdır.

Baxılan dissertasiya işində ehtiyatları iki mənbədən artırılan kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemlərinin riyazi modelləri təklif olunmuş və onların tədqiq olunması üçün dəqiq və təqribi üsullar yaradılmışdır. Yuxarıda qeyd olunanları nəzərə alaraq dissertasiya işinin mövzusu aktualdır.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Bu tədqiqatın obyekti ehtiyatları iki mənbədən artırılan, tək serverli kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemidir. Tədqiqatın predmeti isə belə sistemlərin fəaliyyət mexanizmlərinin, o cümlədən Puasson tipli ehtiyat tələb edən və ehtiyatı məhv edən müştəri axınlarının, müştərilərin xidmət prosesinin, həmçinin səbirsiz müştərilərin davranışının riyazi modelləşdirilməsi və analitik təhlilidir.

Tədqiqat çərçivəsində sistemin Markov prosesi əsasında vəziyyətlər məkanının formalaşdırılması, keçid intensivliklərinin müəyyənləşdirilməsi, stasionar ehtimal paylanmalarının tapılması, eləcə də əsas keyfiyyət göstəricilərinin və ümumi xərclər funksiyasının dəqiq və təqribi üsullarla qiymətləndirilməsi həyata keçirilir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas **məqsədi** ehtiyatları iki fərqli mənbədən artırıla bilən kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemlərinin fəaliyyətini adekvat təsvir edən riyazi modelləri yaratmaqdır. Bu məqsədə çatmaq üçün işdə aşağıdakı **məsələlər** həll olunmuşdur:

- Ehtiyatları iki fərqli mənbədən artırıla bilən kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemlərində ehtiyatların artırılması üçün qaydalar təklif olunmuşdur;
- Ehtiyatları iki fərqli mənbədən artırıla bilən kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemlərinin keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması və gözlənilən ümumi iqtisadi xərclərin minimallaşdırılması üçün səmərəli üsullar yaradılmışdır;
- Ehtiyatları iki fərqli mənbədən artırıla bilən və sonsuz buferi olan kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemlərinin erqodiklik şərtləri tapılmışdır.

Tədqiqat metodları. Dissertasiya işində qoyulan məsələlərin həlli üçün tətbiqi ehtimal nəzəriyyəsindən, əməliyyatların tədqiqi nəzəriyəsinin üsullarından, Markov zəncirlərindən (o cümlədən kvazi-doğum-ölüm proseslərindən), matrislər nəzəriyyəsindən, fəza iriləş-

dirilməsi metodundan və matris-həndəsi metoddan, həmçinin hesablama üsullarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Dissertasiya işində aşağıdakı müddəalar müdafiəyə çıxarılmışdır:

- Sürətli və ləng mənbələrdən təchiz olunan QIS-lər üçün ehtiyatartırma qaydaları.
- Sonlu, lakin böyük ölçülü buferi olan QIS-lərin stasionar paylanmasının hesablanması üçün fəza iriləşdirilməsi metodunun işlənməsi.
- Sonsuz buferli QIS-lərin stasionar paylanmasının hesablanması üçün matris-həndəsi metodun işlənməsi.
- Öyrənilən sistemlərin keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması və gözlənilən ümumi xərclərin minimumlaşdırılması məsələsinin həlli.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində əldə edilmiş əsas elmi yeniliklər aşağıdakılardır:

1. İki mənbədən təchiz olunan QIS modellərinin qurulması. Ehtiyatları iki fərqli xarakterli (sürətli-bahalı və ləng-ucuz) mənbədən təmin edilən QIS-lərin riyazi modellərinin qurulması üçün vahid yanaşma təklif olunmuşdur.

2. Yeni ehtiyatartırma qaydalarının işlənməsi. Ehtiyatları iki fərqli xarakterli mənbədən təmin edilən QIS-lərdə ehtiyatların artırılması üçün ənənəvi (s, Q), (s, S) və $(S-1, S)$ qaydaları əsasında yeni ehtiyatartıma qaydaları təyin edilmişdir. Bu qaydalardan başqa tamamilə yeni olan hibrid ehtiyatartırma qaydası təklif edilmişdir.

3. Stasionar ehtimalların tapılması üçün səmərəli üsulların tətbiqi. Sonlu buferli və böyük ölçülü sistemlər üçün fəza iriləşdirilməsi metodu tətbiq edilərək, stasionar ehtimalların tapılması üçün yüksək dəqiqliyə malik sadə təqribi düsturlar alınmışdır.

Sonsuz buferli sistemlər üçün isə matris-həndəsi metodu tətbiq edilmiş, sistemin stabil fəaliyyəti (stasionar rejimə düşməsi) üçün zəruri olan erqodiklik şərtləri tapılmış və stasionar ehtimalların tapılması üçün alqoritmlər yaradılmışdır.

4. Keyfiyyət göstəricilərinin analitik təyini. Hər bir təklif olunmuş ehtiyatartırma qaydası çərçivəsində sistemin fəaliyyətini xarakterizə edən əsas keyfiyyət göstəriciləri (orta növbə uzunluğu,

ehtiyatların orta səviyyəsi, sifarişlərin itirilmə ehtimalı və s.) üçün aşkar şəkildə düsturlar əldə edilmişdir.

5. Gözlənilən Ümumi Xərclər funksiyasının minimallaşdırılması. Sistemlərin iqtisadi səmərəliliyini qiymətləndirmək üçün Gözlənilən Ümumi Xərclər (ETC) funksiyası qurulmuşdur. Bu funksiya əsasında idarəedici parametrlərin ETC-i minimallaşdıran parametrlərin qiymətlərinin tapılması məsələləri həll edilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Tədqiqatın nəzəri əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, təklif olunan metodlar QIS nəzəriyyəsini mürəkkəb təchizat zəncirləri (ikimənbəli təchizat) halı üçün inkişaf etdirir. Praktiki əhəmiyyəti isə ondan ibarətdir ki, işlənmiş modellər və alqoritmlər real logistika sistemlərində, anbar təsərrüfatlarında, istehsalat müəssisələrində və ticarət şəbəkələrində tətbiq edilə bilər. Bu modellər menecerlərə ehtiyatların optimal səviyyəsini, müxtəlif mənbələrə sifariş nöqtələrini və həcmlərini düzgün təyin etməyə, bununla da xərcləri minimallaşdırmağa və müştəri məmnuniyyətini artırmağa imkan verir.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı beynəlxalq və respublika səviyyəli elmi konfranslarda məruzə edilmiş və müzakirə olunmuşdur:

1. Fevral məruzələri-2022, Aviakosmik Məsələlərin Həllində Gənclərin Yaradıcı Potensialı VII Beynəlxalq elmi-praktiki gənclər konfransı, Bakı, Milli Aviasiya Akademiyası, 2-4 Fevral, 2022.

2. XXV International Scientific Conference Distributed Computer and Communication Networks (DCCN2022), Moscow, September 26-30, 2022.

3. Riyaziyyatın Fundamental Problemləri və İntellektual Texnologiyaların Təhsildə Tətbiqi II Respublika Elmi Konfransı. Sumqayıt Dövlət Universiteti, 15-16 dekabr, 2022.

4. Fevral məruzələri-2023, Aviakosmik Məsələlərin Həllində Gənclərin Yaradıcı Potensialı VIII Beynəlxalq elmi-praktiki gənclər konfransı, Bakı, Milli Aviasiya Akademiyası, 1-3 Fevral, 2023.

5. Management and Control in Solving Engineering Problems (MaCoSEP-2025). Baku Engineering University, 12-14 March, 2025.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Mühəndislik Universitetində yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiya işinin həcmi və strukturu. Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və 118 adda istifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından, 68 cədvəl və 13 şəkildən ibarətdir. İşin ümumi həcmi 148 səhifə təşkil edir.

Elmi nəşrlər. Dissertasiya mövzusu üzrə 12 elmi iş çap olunmuşdur. Onlardan 7 məqalə resenziya olunan jurnallarda nəşr edilmişdir. Bu elmi işlərdən 4 məqalə eyni zamanda "Web of Science" və "Scopus" bazasında indekslənən Q1, Q3 və Q4 kateqoriyalı jurnallarda çap edilmişdir. Müəllifin "Scopus" bazasında Hirsch indeksi (h-indeks) 3, ona olan istinadların sayı isə 43-dür.

DİSSERTASİYA İŞİNİN MƏZMUNU

Girişdə mövzunun aktuallığı əsaslandırılmış, tədqiqatın məqsədi, elmi yeniliyi və praktiki əhəmiyyəti şərh edilmişdir.

Dissertasiya işinin **birinci fəslində** QIS-lərin nəzəri əsasları, yaranma tarixi, əsas komponentləri, keyfiyyət göstəriciləri və müasir riyazi modellərinin vəziyyəti sistemli şəkildə təhlil edilmişdir.

Fəsildə QIS anlayışının elmi ədəbiyyatda təşəkkülü, ilkin fundamental işlər və son onilliklərdə aparılmış sistemli tədqiqatlar ümumiləşdirilmişdir. Qeyd olunmuşdur ki, QIS nəzəriyyəsi son 30 ildə sürətlə inkişaf etmiş, çoxsaylı tətbiq istiqamətləri qazanmış və beynəlxalq elmi jurnallarda xüsusi buraxılışların mövzusu olmuşdur. Bu isə sahənin həm nəzəri, həm də praktik əhəmiyyətini təsdiq edir.

Həmçinin bu fəsildə öyrənilən QIS modellərinin əsas struktur komponentlərinin təsviri də verilmişdir. Klassik ehtiyatartırma qaydaları izah edilmiş, onların tətbiq mexanizmi və xüsusiyyətləri müqayisəli şəkildə verilmişdir. Eyni zamanda vurğulanmışdır ki, bir neçə təchizat mənbəyinin mövcudluğu (məsələn, yavaş-ucuz və sürətli-bahalı mənbələr) sistemin iqtisadi və istismar göstəricilərinə əhəmiyyətli təsir göstərir və belə hallarda yeni, daha çevik ehtiyatartırma qaydalarının işlənməsi zəruridir.

QIS-lərin əsas keyfiyyət göstəriciləri iki qrupa bölünmüşdür:

1. Müştərilərin nöqteyi-nəzərindən mühüm olan göstəricilər (sistemdə və növbədə orta müştəri sayı, gözləmə müddəti, itmə ehtimalı və s.);

2. Sistemi idarə edənlər (menecerlər) üçün mühüm olan göstəricilər (ehtiyatın orta səviyyəsi, sifarişlərin intensivliyi, müxtəlif mənbələrdən daxil olan sifarişlərin həcmi, ehtiyatların məhvolma intensivliyi və s.).

Göstərilmişdir ki, bu kəmiyyətlərin hesablanması üçün sistemin birgə stasionar ehtimal paylanmasının tapılması lazımdır. Bu isə ikiölçülü Markov zəncirlərinin qurulmasını, matris-həndəsi metod və digər ədədi üsulların tətbiqini tələb edir.

Fəslin son hissəsində QIS modellərinin tədqiqinin müasir vəziyyəti geniş ədəbiyyat icmalı əsasında təsnif olunmuşdur. Mövcud ədəbiyyatın hərtərəfli təhlili göstərir ki, QIS nəzəriyyəsində tədqiqatların böyük əksəriyyəti ehtiyatların yalnız bir mənbədən (təchizatçıdan) və ya eyni xüsusiyyətli mənbələrdən bərpa olunduğu hallara fokuslanmışdır. İkimənbəli QIS modelləri istiqamətində son illərdə az saylı araşdırmalar aparılsa da, bu tədqiqatlarda sistemin daxili məhdudiyyətləri və ehtiyatartırma qaydalarının fiziki cəhətdən uyğunlaşdırılması məsələlərinə tam diqqət yetirilmir.

Dissertasiya işində öyrənilən modellər üçün aşağıdakı fərziyyələr qəbul olunur:

- Tək serverli sistemin anbarının maksimal tutumu S-dir ($S < \infty$) və c-müştərilər sistemə λ intensivliyi ilə Puasson axını şəklində daxil olurlar;
- Daxil olan c-müştəri server boş olduqda və ehtiyat səviyyəsi müsbət olduqda dərhal xidmətə qəbul edilir; əgər ehtiyat səviyyəsi müsbətdirsə və server məşğuldursa, o zaman bu c-müştəri sonlu uzunluqlu bir növbəyə yerləşdirilir. c-müştərilərin gözləməsi üçün buferin maksimal ölçüsü $N - 1$ olaraq götürülür ($1 < N < \infty$); əgər c-müştəri daxil olduğu anda bufer doludursa, o zaman bu c-müştəri vahid ehtimalla itir (sistemdən məhsul almadan gedir);
- Əgər c-müştəri daxil olduğu anda ehtiyat səviyyəsi sıfırdırsa, lakin buferdə boş yer varsa, o zaman o, ya φ_1 ehtimalı ilə növbəyə qoşulur və ya φ_2 ehtimal ilə sistemi tərk edir, burada $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$;
- Xidmət başa çatdıqdan sonra hər bir c-müştəri ya σ_1 ehtimalı ilə heç bir məhsul almır və ya σ_2 ehtimalı ilə məhsul alır, burada $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$. Hər iki halda c-müştərilərin xidmət vaxtı eksponensial paylanmaya malikdir, lakin fərqli orta qiymətlərlə: əgər c-müştəri

məhsul almırsa, onun xidmət müddətinin orta qiyməti μ_1^{-1}-ə bərabərdir; əks halda, bu müddət μ_2^{-1}-ə bərabərdir;

• Növbənin sonunda (və ya istənilən yerində) olan c-müştəri ehtiyat səviyyəsi sıfıra düşdükdə səbirsizləşir, yəni, belə hallarda növbədəki bir c-müştəri təsadüfi zaman ərzində gözləyir. Hesab edilir ki, bu müddət eksponensial paylanmaya malik olub orta qiyməti τ^{-1}-ə bərabərdir və bu müddət keçdikdən sonra o, məhsul almadan sistemi tərk edir;

• c-müştərilərlə yanaşı, sistemə Puasson axını ilə intensivliyi κ olan dağıdıcı müştərilər (d-müştərilər) daxil olur. d-müştəri daxil olduqda, ehtiyat səviyyəsi dərhal bir vahid azalır. Fərz edilir ki, d-müştəri anbardakı ehtiyatı məhv edir; hətta d-müştəri anbar boş olduqda serverdə xidmət olunan c-müştəri üçün ayrılmış məhsulu belə məhv edə bilər. Əgər ehtiyat səviyyəsi sıfırdırsa, o zaman daxil olan d-müştəri sistemin işinə təsir etmir;

• Ehtiyatların artırılması ya yavaş təchizatçı (adi, SS), ya da sürətli təchizatçı (təcili, FS) vasitəsi ilə həyata keçirilə bilər. Hər bir mənbədən çatdırılma müddəti eksponensial paylanmaya malikdir, yəni əgər sifariş SS-ə verilibsə, ehtiyatın çatdırılması üçün orta gözləmə müddəti ν_1^{-1}-ə bərabərdir, və əgər sifariş FS-ə verilibsə, bu müddət ν_2^{-1} -ə bərabərdir, burada $\nu_2 > \nu_1$;

İkinci fəsildə ehtiyatları iki müxtəlif mənbədən artırıla bilən və **sonlu bufer** tutumuna malik kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemlərinin riyazi modelləri yaradılır və araşdırılır.

Bu fəsildə 4 müxtəlif ehtiyatartırma qaydalarına baxılır:

• (s, Q) – Əgər ehtiyat səviyyəsi s sifariş nöqtəsinə düşərsə, $0 < s < S/2$, o zaman SS-ə sifariş verilir; əgər ehtiyat səviyyəsi r kritik səviyyəsinə düşərsə ($0 \le r < s$), o zaman SS-ə verilən sifariş dərhal ləğv edilir və FS-ə sifariş verilir. Hər bir sifarişin həcmi sabit olaraq $Q = S - s$ götürülür.

• (s, S) – Əgər ehtiyat səviyyəsi s nöqtəsinə düşərsə, $0 < s < S$, o zaman SS-ə sifariş verilir; ehtiyat səviyyəsi r kritik səviyyəsinə düşərsə ($0 \le r < s$), o zaman SS-ə verilən sifariş dərhal ləğv edilir və FS-ə sifariş verilir. Hər bir sifarişin həcmi $Q = S - m$ götürülür, burada m cari ehtiyat səviyyəsidir.

• $(S-1,S)$ – hər dəfə bir məhsul satıldıqda dərhal yeni sifariş verilir.

• Hibrid – Əgər sistemin ehtiyatlarının səviyyəsi s-ə düşərsə, $0<s<S/2$, SS-ə (s,Q) qaydası ilə sifariş verilir; ehtiyat səviyyəsi r kritik həddinə çatarsa, $0\le r<s$, onda SS-ə əvvəl verilmiş sifariş dərhal ləğv olunur və FS-ə (s,S) qaydası ilə yeni sifariş verilir.

Konkretlik üçün burada yalnız (s,Q) ehtiyatartırma qaydası şərh edilir.

Tədqiq olunan sistemin riyazi modeli ikiölçülü Markov zənciridir (2DMC). Bu zəncirin vəziyyətləri (n,m) şəklində təsvir olunur, burada n sistemdəki c-müştərilərin ümumi sayını (buferdə və ya xidmətdə olan), $n=0,1,\dots,N$, m isə ehtiyatların mövcud səviyyəsini göstərir, $m=0,1,\dots,S$. Baxılan 2DMC-nin vəziyyətlər fəzası aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$E=\{0,1,\dots,N\}\times\{0,1,\dots,S\}. \quad (1)$$

Zəncirin $(n_1,m_1)\in E$ vəziyyətindən $(n_2,m_2)\in E$ vəziyyətinə keçidin intensivliyini $q\big((n_1,m_1);(n_2,m_2)\big)$ ilə, onun generatoru isə Q ilə işarə edilir:

$$Q=\big(q\big((n_1,m_1);(n_2,m_2)\big):(n_1,m_1),(n_2,m_2)\in E\big). \quad (2)$$

Sistemin fəaliyyət mexanizmini nəzərə alaraq doğuran matrisin elementlərinin hesablanması üçün aşağıdakı münasibətləri alınır:

$$q\big((n,m);(n+1,m)\big)=\lambda\varphi_1 I(n<N)\cdot I(m=0); \quad (3)$$

$$q\big((n,m);(n+1,m)\big)=\lambda I(n<N)\cdot I(m>0); \quad (4)$$

$$q\big((n,m);(n-1,m)\big)=\mu_1\sigma_1\cdot I(m>0); \quad (5)$$

$$q\big((n,m);(n-1,m-1)\big)=\mu_2\sigma_2\cdot I(m>0); \quad (6)$$

$$q\big((n,m);(n,m-1)\big)=\kappa\cdot I(m>0); \quad (7)$$

$$q\big((n,0);(n-1,0)\big)=\tau\cdot I(n>0); \quad (8)$$

$$q\big((n,m);(n,m+S-s)\big)=\nu_1\cdot I(r<m\le s); \quad (9)$$

$$q\big((n,m);(n,m+S-s)\big)=\nu_2\cdot I(0\le m\le r). \quad (10)$$

Burada $I(A)$ ilə A hadisəsinin indikator funksiyası işarə edilmişdir: əgər A hadisəsi baş verərsə, onda $I(A)=1$, əks halda $I(A)=0$.

Qurulmuş 2DMC-nin vəziyyətlərinin stasionar ehtimalları qlobal balans tənlikləri sisteminin (QBTS) həlli nəticəsində tapılır. Bu

tənliklər (3)-(10) münasibətləri vasitəsilə qurulur və ölçüsü $(N+1)(S+1)$ olan xətti cəbri tənlikləri sistemini təşkil edir. Sistemin ilkin parametrlərinin böyük olmayan qiymətləri üçün bu QBTS mövcud proqram təminatı ilə həll edilə bilər. Lakin böyük ölçülü QBTS-lər üçün hesablamalarda çətinliklər yaranır. Bu çətinlikləri aradan qaldırmaq üçün AMEA-nın müxbir üzvü, texnika elmləri doktoru, professor A.Z. Məlikovun yaratdığı 2DMC-lər üçün vəziyyətlər fəzasının iriləşdirilməsi metodundan (ing. Space Merging Method, SMM) istifadə edilir[1].

Baxılan modeldə SMM-in tətbiq olunmasının mümkünlüyü üçün aşağıdakı fərziyyə qəbul edilir: $\lambda \gg max(\kappa, \nu_2)$. Bu şərtlər daxilində, tədqiq olunan 2DMC-nin (1) ilkin vəziyyətlər fəzasının aşağıdakı kimi bölünməsi nəzərdən keçirilir:

$$E = \bigcup_{m=0}^{S} E_m \ , E_{m_1} \cap E_{m_2} = \emptyset \ , \quad m_1 \neq m_2, \qquad (11)$$

burada

$$E_m = \{(n,m) \in E : n = 0,1,\dots,N\}, m = 0,1,\dots,S. \qquad (12)$$

(11) bərabəliyində göstərilən E_m alt çoxluğu ilkin vəziyyətlər çoxluğunun elə vəziyyətlərindən təşkil olunur ki, həmin vəziyyətlərin hər birində ehtiyatların səviyyəsi c-müştərilərin sayından asılı olmayaraq m-dir.

Fəza iriləşdirilməsi metoduna əsasən hər bir E_m alt çoxluğu bir $\langle m \rangle$ vəziyyətində birləşdirilir və iriləşdirilmiş vəziyyətlər çoxluğu aşağıdakı şəkildə ifadə edilir:

$$\hat{E} = \{\langle m \rangle : m = 0,1,\dots,S\}.$$

İlkin vəziyyətlər çoxluğunda $U: E \to \hat{E}$ iriləşdirmə funksiyası aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$U((n,m)) = \langle m \rangle \ , \ (n,m) \in E.$$

Təklif olunan SMM yanaşmasına uyğun olaraq əvvəlcə (11) parçalanmasına daxil olan $E_m, m = 0,1,\dots,S,$ alt çoxluqlarının daxilindəki vəziyyətlərin stasionar ehtimallarının tapılması məsələsinə baxılır. E_m alt çoxluqlarının hər birində stasionar paylanmalar

[1] Ponomarenko, L. Performance Analysis and Optimization of Multi-Traffic on Communication Networks. / L.Ponomarenko, C.S.Kim, A.Melikov. – London: Springer, – 2010. – 194 p.

M/M/1/N sisteminin stasionar paylanması ilə üst-üstə düşür. Bu bölünmüş modellərdə $(n,m) \in E_m$ vəziyyətlərinin stasionar ehtimalları $\rho_m(n)$ belə hesablanir:

$$\rho_m(n) = \begin{cases} \theta^n \dfrac{1-\theta}{1-\theta^{N+1}}, & m > 0, n = 0,1,\dots,N, \\ \psi^n \dfrac{1-\psi}{1-\psi^{N+1}}, & m = 0, n = 0,1,\dots,N. \end{cases} \quad (13)$$

burada $\theta = \lambda/\mu_1\sigma_1$ və $\psi = \lambda\varphi_1/\tau$.

İriləşdirilmiş $\langle m_1 \rangle \in \hat{E}$ vəziyyətindən digər iriləşdirilmiş $\langle m_2 \rangle \in \hat{E}$ vəziyyətinə keçidin intensivliyini $q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle)$ ilə işarə edilir. Bu kəmiyyətlər aşağıdakı düstura əsasən hesablanır:

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \begin{cases} \nu_2, & 0 \le m_1 \le r, m_2 = m_1 + S - s, \\ \nu_1, & r+1 \le m_1 \le s, m_2 = m_1 + S - s, \\ \omega, & m_1 > 0, m_2 = m_1 - 1, \end{cases} \quad (14)$$

burada

$$\omega = \mu_2\sigma_2\big(1 - \rho(0)\big) + \kappa. \quad (15)$$

Alınmış (14) düsturlarından istifadə edərək iriləşdirilmiş modeli təsvir edən birölçülü Markov zəncirinin stasionar ehtimallarının $\pi(\langle m \rangle)$, $\langle m \rangle \in \hat{E}$ tapilması üçün balans tənlikləri tərtib olunmuş və göstərilmişdir ki, bu ehtimallar aşağıdakı şəkildə tapılır:

$$\pi(\langle m \rangle) = \begin{cases} \alpha_m \pi(\langle 0 \rangle), & 1 \le m \le r, \\ \beta_m \pi(\langle 0 \rangle), & r+1 \le m \le s, \\ \beta_s \pi(\langle 0 \rangle), & s+1 \le m \le S-s, \\ \eta_m \pi(\langle 0 \rangle), & S-s+1 \le m \le S, \end{cases} \quad (16)$$

$$\pi(\langle 0 \rangle) = \left(1 + \sum_{m=1}^{r} \alpha_m + \sum_{m=r+1}^{s} \beta_m + \right.$$
$$\left. + (S-2s)\beta_s + \sum_{m=S-s+1}^{S} \eta_m \right)^{-1}. \quad (17)$$

Burada aşağıdakı işarələmələrdən istifadə olunmuşdur:

$$\eta_m = \frac{1}{\omega} \sum_{i=m-S+s}^{s} \chi_i x_i, S - s + 1 \le m \le S; \quad (18)$$

$$\chi_i = \begin{cases} \alpha_i, & 1 \le i \le r, \\ \beta_i, & r+1 \le i \le s; \end{cases} \quad (19)$$

$$x_i = \begin{cases} \nu_2, & 1 \le i \le r, \\ \nu_1, & r+1 \le i \le s. \end{cases} \quad (20)$$

$$\alpha_m = a_2(1+a_2)^{m-1}, \quad (21)$$

$$\beta_m = a_2(1+a_2)^r(1+a_1)^{m-r-1}; \quad (22)$$

$$a_k = \frac{\nu_k}{\omega}, \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

Nəhayət, SMM-ə uyğun olaraq, (13) və (16) münasibətlərindən istifadə edərək tədqiq olunan QIS-in riyazi modeli kimi yaradılan 2DMC-nin stasionar ehtimallarının təqribi qiymətləri aşağıdakı düsturlara əsasən hesablanır:

$$\hat{p}(n,m) = \rho_m(n) \cdot \pi(\langle m \rangle), (n,m) \in E, \quad (24)$$

Sistemdəki müştərilərin orta sayı (L_{av}) uyğun təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi kimi tapılır:

$$L_{av} = \sum_{n=1}^{N} n \sum_{m=0}^{S} p(n,m) \ . \quad (25)$$

Ehtiyat alan müştərilərin (c-müştərilərin) itməsi ehtimalını (PL) hesablamaq üçün aşağıdakı düstur alınmışdır:

$$PL = \varphi_2 \sum_{n=0}^{N} p(n,0) \ + \sum_{m=0}^{S} p(N,m) + \\ + \frac{\tau}{\tau + \lambda\varphi_1 + \nu_2} \sum_{n=1}^{N-1} p(n,0) + \frac{\tau}{\tau + \nu_2} p(N,0). \quad (26)$$

Anbardakı ehtiyatların orta səviyyəsi (S_{av}) uyğun təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi kimi tapılır:

$$S_{av} = \sum_{m=1}^{S} m \sum_{n=0}^{N} p(n,m) \ . \quad (27)$$

Adi mənbədən $V_{av}(1)$ və təcili mənbədən $V_{av}(2)$ çatdırılan sifarişlərin orta həcmi də uyğun təsadüfi kəmiyyətlərin riyazi gözləməsi kimi tapılır:

$$V_{av}(1) = \sum_{m=r+1}^{S} (S-s) \sum_{n=0}^{N} p(n,m); \quad (28)$$

$$V_{av}(2) = \sum_{m=0}^{r} (S-s) \sum_{n=0}^{N} p(n,m) \ . \qquad (29)$$

Sistemin ehtiyatlarının orta məhvolma intensivliyi (*DRS*) aşağıdakı düstur vasitəsi ilə hesablanır:

$$DRS = \kappa \left(1 - \sum_{n=0}^{N} p(n,0) \right). \qquad (30)$$

SS-dən və FS-dən çatdırılan sifarişlərin orta intensivliyi belə hesablanır:

$$RR_1 = \kappa p(0, s+1) + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa) \sum_{n=1}^{N} p(n, s+1). \quad (31)$$

$$RR_2 = \kappa p(0, r+1) + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa) \sum_{n=1}^{N} p(n, r+1) \ . \quad (32)$$

Bu yanaşma kiçik və orta ölçülü modellər üçün əlverişlidir. Böyük ölçülü modellərin keyfiyyət göstəricilərinin təqribi qiymətlərini hesablamaq üçün (24) münasibətlərindən istifadə edərək aşağıdakı düsturlar alınmışdır:

$$S_{av} \approx \sum_{m=1}^{S} m\pi(\langle m \rangle) \ ; \qquad (33)$$

$$V_{av}(1) \approx (S-s) \sum_{m=r+1}^{S} \pi(\langle m \rangle) \, ; \qquad (34)$$

$$V_{av}(2) \approx (S-s) \sum_{m=0}^{r} \pi(\langle m \rangle) \, ; \qquad (35)$$

$$L_{av} \approx \sum_{n=1}^{N} n \Big(\big(1 - \pi(\langle 0 \rangle)\big) \rho(n) + \pi(\langle 0 \rangle) \rho_0(n) \Big) ; \qquad (36)$$

$$DRS \approx \kappa \big(1 - \pi(\langle 0 \rangle)\big) \ ; \qquad (37)$$

$$RR_1 \approx \pi(\langle s+1 \rangle) \Big(\kappa \rho(0) + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa) \big(1 - \rho(0)\big) \Big) ; \quad (38)$$

$$RR_2 \approx \pi(\langle r+1 \rangle) \Big(\kappa \rho(0) + (\mu_2 \sigma_2 + \kappa) \big(1 - \rho(0)\big) \Big) ; \quad (39)$$

$$PL \approx \varphi_2\pi(0)\big(1-\rho_0(N)\big)+ \\ +\frac{\tau}{\tau+\lambda\varphi_1+\nu_2}\pi(0)\big(1-\rho_0(0)-\rho_0(N)\big)+ \\ +\frac{\tau}{\tau+\nu_2}\rho_0(N)\pi(0)\big(1-\pi(0)\big)\rho(N)+\pi(0)\rho_0(N)\,. \tag{40}$$

Dissertasiya işində keyfiyyət göstəriciləri üçün alınmış düsturlar vasitəsi ilə onların sistemin ilkin parametrlərdən asılılığını araşdırılmışdır. Bu səbəblə, hipotetik modeldə sistemin ilkin parametrləri üçün aşağıdakı sabit qiymətlər götürülür:

$$\lambda = 8,\ \kappa = 2,\ \mu_1 = 45,\ \mu_2 = 15,\ \tau = 1.5,\ \nu_1 = 2,\ \nu_2 = 8,\\ \sigma_1 = 0.4,\ \varphi_1 = 0.6, r = 5,\ S = 30,\ N = 100.$$

Avtoreferatın həcminin kiçik olduğunu nəzərə alaraq burada yalnız keyfiyyət göstəricilərinin *c*-müştərilərin intensivliyindən asılılığı aşağıdakı cədvəldə verilmişdir:

Cədvəl 1. Keyfiyyət göstəricilərinin λ parametrindən asılılığı

λ	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	PL
8	3.29	0.08	5.63	0.80	2	0.08	2.45×10^{-2}	4.22×10^{-5}
9	3.40	0.10	5.78	1.01	2	0.09	2.94×10^{-2}	6.48×10^{-5}
10	3.50	0.11	5.92	1.26	2	0.10	3.46×10^{-2}	9.50×10^{-5}
11	3.60	0.13	6.06	1.58	2	0.10	4.06×10^{-2}	1.34×10^{-4}
12	3.69	0.15	6.18	2.02	2	0.11	4.60×10^{-2}	1.83×10^{-4}

Bu fəsildə həmçinin baxılan model (s,S), $(S-1,S)$ və hibrid ehtiyatartırma qaydalarından istifadə edildikdə də tədqiq olunmuşdur. Avtoreferatın həcmi nəzərə alınaraq onlar burada verilməmişdir.

Bu modellərdə mühüm əhəmiyyət kəsb edən və əsas öyrənilməli məsələlərdən biri onların fəaliyyəti nəticəsində yaranan ümumi xərclərin minimallaşdırılması məsələləridir. Real həyatdakı sistemlərin yüklənmə parametrləri (yəni sifarişlərin daxilolma intensivlikləri və onlara xidmət müddəti) və eləcə də dağıdıcı sifarişlərin intensivlikləri adətən idarə olunmayan parametrlərdir. Belə olduqda idarə olunan parametrlər kimi adi sifarişlərin və təcili sifarişlərin ehtiyatların hansı səviyyəsində verilməli olduğunu müəyyən edən parametrlər önə çıxır. Başqa sözlə, baxılan ehtiyatartırma qaydalarında iştirak edən s və r parametrlərini seçməyin hesabına sistemin ümumi xərclərini minimallaşdırmaq olar.

Baxılan QIS modellərində gözlənilən ümumi xərclərin (ing. Expected Total Cost, ETC) minimumlaşdırılması funksiyası aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$ETC(s,r) = \sum_{i=1}^{2}\big(K_i + c_r(i)V_{av}(i)\big)RR_i + c_cRR_2 + c_hS_{av} + \\ + c_dDRS + c_l\lambda PL + c_wL_{av}\,, \qquad (41)$$

burada

- K_i – Mənbə-i (i=1,2) üçün ehtiyatların artırılması sifarişinin birdəfəlik icra olunma xərci,
- $c_r(i)$ – Mənbə-i (i=1,2) vasitəsi ilə vahid ehtiyat üçün daşınma xərci,
- c_c – Mənbə-1-ə olan sifarişin ləğv edilməsi üçün cərimə,
- c_h – anbarda vahid ehtiyatın saxlanma xərci,
- c_d – anbarda vahid ehtiyatın məhvolma xərci,
- c_l – bir c-müştərinin itməsi xərci,
- c_w – bir c-müştərinin növbədə gözləmə xərcidir.

Mənbə-1 dedikdə, adi mənbə (SS), Mənbə-2 dedikdə isə təcili mənbə (FS) başa düşülür.

Modeldə bütün xərc parametrləri şərti pul vahidi ilə ifadə edilir və onların ölçü vahidləri xərc funksiyasının quruluşuna uyğun müəyyənləşdirilir.

Optimallaşdırma məsələsi belə qoyulur: ehtiyatların artırılması strategiyasındakı r və s parametrlərinin elə (s^*, r^*) optimal qiymətlərini tapmaq tələb olunur ki, (41) funksiyası minimum qiyməti alsın. Başqa sözlə, aşağıdakı məsələni həll etmək tələb olunur:

$$(s^*, r^*) = arg \min_{(s,r)\in X} ETC(s,r)\,, \qquad (42)$$

burada $X = \{(s,r): 0 \le r < s < S/2\}$.

(41), (42) məsələsinin həmişə həlli vardır, çünki mümkün həllər çoxluğu diskret və sonludur. Müvafiq proqram təminatının köməyilə bu məsələni asanlıqla həll etmək olur. Bütün aparılan ədədi təcrübələrdə nəticələrin müqayisəsi üçün parametrlərin aşağıdakı qiymətləri götürülmüş və ədədi nəticələr alınmışdır (Cədvəl 2 – Cədvəl 4):

$$S = 22, \lambda = 8, \kappa = 2, \mu_1 = 45, \mu_2 = 15, \tau = 1.5, \nu_1 = 2, \nu_2 = 8,$$
$$K_1 = 100, K_2 = 200,\ c_r(1) = 50, c_r(2) = 100, c_c = 50, c_h = 35,$$
$$c_d = 75, c_l = 200, c_w = 50, N = 100\,.$$

Cədvəl 2. (s, Q) **ehtiyatartırma qaydası üçün (41) düsturunun nəticələri**

r	s								
	10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
1	870.62	850.90	835.46	824.94	***820.45***	823.69	837.22	864.91	912.74
2	872.35	853.23	838.68	829.49	827.00	833.34	851.80	887.57	
3	879.47	862.48	850.85	845.75	849.10	863.98	895.31		
4	892.02	878.78	872.33	874.49	888.29	918.65			
5	910.98	903.58	905.28	919.10	950.08				
6	938.43	939.84	954.14	986.50					
7	977.88	992.76	1026.87						
8	1035.16	1071.21							
9	1120.16								

Cədvəl 3. (s, S) **ehtiyatartırma qaydası üçün (41) düsturunun nəticələri**

r	s								
	10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
1	896.90	885.21	875.95	869.80	***867.73***	871.11	881.95	903.24	939.62
2	896.22	884.54	875.36	869.44	867.88	872.30	885.20	910.49	
3	899.59	889.07	881.50	877.89	879.71	889.26	910.23		
4	906.67	898.44	894.07	895.01	903.51	923.23			
5	917.85	913.31	914.16	922.68	942.6				
6	934.27	935.39	944.45	965.31					
7	958.00	967.89	990.1						
8	992.67	1016.55							
9	1044.60								

Cədvəl 4. Hibrid ehtiyatartırma qaydası üçün (41) düsturunun nəticələri

r	s								
	10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**
1	794.53	775.68	759.29	745.44	734.26	725.93	720.63	718.50	719.60
2	791.67	772.39	755.32	740.39	727.51	716.50	706.98	***698.15***	
3	791.46	772.31	755.19	739.84	725.90	712.72	699.06		
4	792.97	774.24	757.28	741.59	726.36	710.09			
5	795.64	777.34	760.35	743.74	725.81				
6	798.98	780.80	763.02	743.79					
7	802.37	783.44	762.97						
8	804.69	782.92							
9	803.51								

ETC-in minimal qiyməti cədvəllərdə qalın şriftlə işarələnmişdir. İşin ikinci fəslində müxtəlif ehtiyatartırma qaydalarının səmərəliliyi ətraflı şəkildə analiz olunmuşdur.

Keyfiyyət göstəriciləri sistemin işinin ayrı-ayrı tərəflərini – xidmət səviyyəsini, tələbin ödənmə dərəcəsini və resurslardan istifadənin səmərəliliyini – xarakterizə etsə də, ümumi iqtisadi qiymətləndirmə baxımından tam obyektiv nəticə vermir.

Belə ki, müxtəlif ehtiyatartırma qaydalarında eyni keyfiyyət göstəricisi fərqli maliyyə nəticələri ilə müşayiət oluna bilər. Məsələn, (s, Q) və (s, S) qaydaları üçün eyni orta ehtiyat səviyyəsi müşahidə olunsa da, onların birində sifarişin kiçik və tez-tez, digərində isə daha iri və ləng formada həyata keçirilməsi səbəbindən sifariş və çatdırılma xərcləri kəskin fərqlənə bilər. Həmçinin, bəzi hallarda sistemin keyfiyyət göstəriciləri yaxşılaşsa belə (məsələn, gözləmə müddəti azalsa), bunun müqabilində saxlama və ya təcili çatdırılma xərcləri arta bilər ki, bu da ümumi xərci yüksəldir.

Məhz bu səbəbdən, müxtəlif ehtiyatartırma qaydalarının real effektivliyini qiymətləndirmək üçün onların ETC funksiyası baxımından müqayisəsi daha düzgün və obyektiv yanaşmadır. ETC bütün xərcləri – saxlama, sifariş, xidmət, gecikmə, təcili çatdırılma və ləğv olunmuş sifariş xərclərini – vahid bir göstəricidə birləşdirir və beləliklə, sistemin ümumi iqtisadi səmərəliliyini tam şəkildə əks etdirir.

Üçüncü fəsildə ehtiyatları iki mənbədən artırıla bilən və **sonsuz** buferə malik kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemlərinin riyazi modelləri yaradılır və araşdırılır. İkinci fəsildə olduğu kimi burada da (s, Q), (s, S), $(S-1, S)$ və hibrid kimi 4 müxtəlif ehtiyatartırma qaydalarına baxılır.

Konkretlik üçün burada yalnız ehtiyatların artırılması üçün (s, S) qaydasından istifadə edən QIS modelinə baxılır.

Baxılan modeldə üçün ikinci fəsildə verilmiş fərziyyələr öz qüvvəsində qalır. Fərq yalnız bufer tutumunun sonsuz olması və ehtiyatartırma mexanizmindədir.

Vəziyyətlər fəzası

$$E = \{(n, m): n \geq 0;\ 0 \leq m \leq S\}$$

şəklində təyin olunur.

Zəncirin generatoru (2) bərabərliyi ilə təyin edilir, lakin burada istənilən (n,m) vəziyyətindən $(n+1,m)$ vəziyyətyinə keçmək mümkündür, çünki növbənin uzunluğuna məhdudiyyət yoxdur. Sistemin iş prinsipi nəzərə alınmaqla generatorun sıfırdan fərqli elementləri isə (3)-(10) bərabərliklərinə bənzər şəkildə müəyyən olunur. Belə ki, (9) və (10) bərabərlikləri əvəzinə uyğun olaraq

$$q\big((n,m);(n_1,S)\big) = \nu_1 \cdot I(r < m \le s); \qquad (43)$$

$$q\big((n,m);(n,S)\big) = \nu_2 \cdot I(0 \le m \le r). \qquad (44)$$

götürülür.

Beləliklə, qurulan 2DMC səviyyədən asılı olmayan kvazi-doğum-ölüm tipli (ing. Level-Independent Quasi-Birth-Death, LIQBD) proses təşkil edir. Bu 2DMC-nin vəziyyətlərini leksikoqrafik qaydada (yəni $(0,0),(0,1),\dots,(0,S),(1,0),(1,1),\dots,(1,S),$ ... ardıcıllıqla) nömrələdikdə, alınmış LIQBD prosesin generatoru aşağıdakı kimi bloklardan düzəlmiş matris formasında (blok-matris) ifadə olunur:

$$G = \begin{pmatrix} B & A_0 & O & O & O & \cdots \\ A_2 & A_1 & A_0 & O & O & \cdots \\ O & A_2 & A_1 & A_0 & O & \cdots \\ O & O & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad (45)$$

burada

$$B = \left\|b_{ij}\right\|,\ A_k = \left\|a_{ij}^{(k)}\right\|,\ k = 0,1,2;\ i,j = 0,1,\dots,S, \qquad (46)$$

blok-matrisləri ölçüsü $(S+1)\times(S+1)$ olan kvadrat matrislərdir və onların sıfırdan fərqli elementləri aşağıdakı kimi müəyyən olunur:

$$b_{ij} = \begin{cases} \nu_2, & \text{əgər } 0 \le i \le r, j = S, \\ \nu_1, & \text{əgər } r < i \le s, j = S, \\ \kappa, & \text{əgər } 0 < i \le S, j = i-1, \\ -(\nu_2 + \lambda\phi_1), & \text{əgər } i = j = 0, \\ -(\nu_2 + \kappa + \lambda), & \text{əgər } 0 < i \le r, i = j, \\ -(\nu_1 + \kappa + \lambda), & \text{əgər } r < i \le s, i = j, \\ -(\kappa + \lambda), & \text{əgər } s < i \le S, i = j; \end{cases} \qquad (47)$$

$$a_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \lambda\varphi_1, & \text{əgər } i = j = 0, \\ \lambda, & \text{əgər } i > 0, i = j; \end{cases} \qquad (48)$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \nu_2, & \text{əgər } 0 \le i \le r, j = S, \\ \nu_1, & \text{əgər } r < i \le s, j = S, \\ \kappa, & \text{əgər } 0 < i \le S, j = i-1, \\ -(\tau + \nu_2 + \lambda\phi_1), & \text{əgər } i = j = 0, \\ -(\nu_2 + \kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{əgər } 0 < i \le r, i = j, \\ -(\nu_1 + \kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{əgər } r < i \le s, i = j, \\ -(\kappa + \lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2), & \text{əgər } s < i \le S, i = j; \end{cases} \quad (49)$$

$$a_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \tau, & \text{əgər } i = j = 0, \\ \mu_1\sigma_1, & \text{əgər } i > 0, i = j, \\ \mu_2\sigma_2, & \text{əgər } i > 0, j = i-1. \end{cases} \quad (50)$$

Sistemin stasionar rejimdə işləməsi üçün riyazi modeli olan 2DMC-nin **erqodik** (stabil, dayanıqlı) olması zəruridir.

Aşağıdakı teorem isbat olunur:

Teorem. (s, S) ehtiyatartırma qaydasından istifadə edən sistem yalnız və yalnız aşağıdakı şərt yerinə yetirildiyi halda erqodikdir:

$$\lambda\big(1 - (1-\varphi_2)\pi(0)\big) < \tau\pi(0) + (\mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2)\big(1 - \pi(0)\big), \quad (51)$$

burada $\pi(0)$ kəmiyyəti aşağıdakı kimi müəyyən olunur:

$$\pi(0) = \left[(1+\theta_2)^r\big(1 + \theta_2((1+\theta_1)^{s-r} - 1 + (S-s)(1+\theta_1)^{s-r-1})\big)\right]^{-1}$$

$$\theta_i = \frac{\nu_i}{(\mu_2\sigma_2 + \kappa)}, i = 1,2.$$

G generatoruna uyğun stasionar paylanmanı aşağıdakı kimi işarə edək:

$$p = (p_0, p_1, p_2, \dots),$$

burada $p_n = \big(p(n,0), p(n,1), \dots, p(n,S)\big),\ n = 0,1, \dots .$

Məlum LIQBD alqoritminə əsaslanaraq belə nəticəyə gəlmək olar ki, (51) erqodiklik şərti ödəndikdə axtarılan stasionar paylanma aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$p_n = p_0 R^n,\ n \ge 1, \quad (52)$$

burada R – ölçüsü $(S+1) \times (S+1)$ olan mənfi olmayan kvadrat matrisdir və

$$R^2 A_2 + RA_1 + A_0 = 0 \quad (53)$$

kvadratik matris tənliyinin minimal həllidir.

Sərhəd vəziyyətlərinin p_0 ehtimalları isə aşağıdakı QBTS vasitəsilə hesablanır:

$$p_0(B + RA_2) = 0, \quad (54)$$

$$p_0(\boldsymbol{I} - R)^{-1}\boldsymbol{e} = 1, \quad (55)$$

burada $\boldsymbol{I}$ və $\boldsymbol{e}$ uyğun olaraq $(S+1)$-tərtibli vahid matris və $(S+1)$-ölçülü sütun vektorudur.

Beləliklə, (51) erqodiklik şərti ödənildikdə (52)-(55) tənlikləri vasitəsi ilə qurulmuş 2DMC-nin vəziyyətlərinin stasionar ehtimalları hesablanır.

Sistemin əsas keyfiyyət göstəriciləri əvvəlki fəsildə olduğuna oxşar təyin edilir, lakin nəzərə almaq lazımdır ki, baxılan modellərdə növbənin uzunluğu sonsuzdur. Keyfiyyət göstəriciləri üçün aşağıdakı düsturlar alınmışdır:

- Anbardakı ehtiyatların orta səviyyəsi (S_{av}):

$$S_{av} = \sum_{m=1}^{S} m \sum_{n=0}^{\infty} p(n,m)\,;$$

- SS-dən çatdırılan sifarişlərin orta həcmi ($V_{av}(1)$):

$$V_{av}(1) = \sum_{m=r+1}^{S} (S-m) \sum_{n=0}^{\infty} p(n,m)\,;$$

- FS-dən çatdırılan sifarişlərin orta həcmi ($V_{av}(2)$):

$$V_{av}(2) = \sum_{m=0}^{r} (S-m) \sum_{n=0}^{\infty} p(n,m).$$

- Sistemdəki *c*-müştərilərin orta sayı (L_{av}):

$$L_{av} = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=0}^{S} p(n,m)\,;$$

- Sistemin ehtiyatlarının orta məhvolma intensivliyi (*DRS*):

$$DRS = \kappa \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} p(n,0)\right);$$

- SS-ə olan sifarişlərin orta intensivliyi (RR_1):

$$RR_1 = \kappa p(0, s+1) + (\mu_2\sigma_2 + \kappa) \sum_{n=1}^{\infty} p(n, s+1)\,;$$

- FS-ə olan sifarişlərin orta intensivliyi (RR_2):

$$RR_2 = \kappa p(0, r+1) + (\mu_2\sigma_2 + \kappa) \sum_{n=1}^{\infty} p(n, r+1)\,;$$

• Ehtiyat alan müştərilərin (c-müştərilərin) itməsi ehtimalı (PL):

$$PL = \varphi_2 \sum_{n=0}^{\infty} p(n,0) \ + \frac{\tau}{\tau + \lambda\varphi_1 + \nu_2} \sum_{n=1}^{\infty} p(n,0).$$

Aparılmış ədədi təcrübələrin köməyilə əsas sistem parametrləri ardıcıl şəkildə dəyişdirilərək, onların əsas keyfiyyət göstəricilərinə təsiri sistematik şəkildə araşdırılır. Bütün təcrübələrdə

$$\varphi_1 = 0.6,\ \sigma_1 = 0.4,\ \lambda = 20,\ \kappa = 10,\ \mu_1 = 35,\ \mu_2 = 25,$$
$$S = 22,\ \tau = 20,\ \nu_1 = 5,\ \nu_2 = 10,$$

sabit götürülür.

Avtoreferatın həcminin kiçik olduğunu nəzərə alaraq burada yalnız keyfiyyət göstəricilərinin c-müştərilərin intensivliyindən asılılığı aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

Cədvəl 5. Keyfiyyət göstəricilərinin λ parametrindən asılılığı

λ	$V_{av}(1)$	$V_{av}(2)$	S_{av}	L_{av}	DRS	RR_1	RR_2	PL
20	2.39	0.76	14.49	2.22	9.94	1.32	0.44	0.09
22	2.43	0.84	14.41	3.13	9.93	1.38	0.48	0.13
24	2.47	0.91	14.32	4.91	9.92	1.43	0.52	0.18
26	2.50	0.98	14.25	8.60	9.90	1.48	0.56	0.23
28	2.54	1.06	14.16	30.26	9.89	1.54	0.61	0.30

Bu fəsildə də (s,Q), $(S-1,S)$ və hibrid ehtiyatartırma qaydaları üçün riyazi modellər qurulmuşdur. Həmçinin, ümumi xərclərin minimumlaşdırılması məsələsinə də baxılmış və ehtiyatartırma qaydalarında iştirak edən s və r parametrlərini seçməyin hesabına sistemin minimal ümumi xərcləri tapılmışdır.

DİSSERTASİYA İŞİNİN ƏSAS NƏTİCƏLƏRİ

Dissertasiya işində ehtiyatları iki müxtəlif mənbədən təmin olunan kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemlərinin riyazi modelləşdirilməsi, təhlili və sistemdə yaranan ümumi xərclərin minimumlaşdırılması məsələləri həll edilmişdir. Aparılan tədqiqatlar əsasında aşağıdakı əsas elmi və praktiki nəticələr əldə olunmuşdur:

1. Ehtiyatların artırılmasında iki fərqli mənbədən istifadə edən, həm sonlu, həm də sonsuz bufer tutumuna malik kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemləri üçün dörd müxtəlif ehtiyatartırma qaydası – (s,Q), (s,S), $(S-1,S)$ və hibrid təklif edilmiş və hər bir hal üçün ikiölçülü Markov zəncirləri əsasında müvafiq riyazi modellər

qurulmuşdur. Hər bir model üçün vəziyyətlər fəzası müəyyən edilmiş və onların generator matrisləri tapılmışdır [1], [2], [3], [4], [7], [12].

2. Bufer tutumu sonlu olan kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemləri modellərinin tədqiqi üçün ikiölçülü Markov zəncirlərinin həm balans tənliklərinin həllinə əsaslanan dəqiq üsul, həm də böyük ölçülü modellər üçün fəza iriləşdirilməsi alqoritminə əsaslanan təqribi üsul işlənib hazırlanmışdır. Təqribi üsulun tətbiqi ilə öyrənilən sistemlərin stasionar ehtimallarını və əsas keyfiyyət göstəricilərini təyin edən analitik düsturlar alınmışdır. Təklif olunan təqribi yanaşma, mürəkkəb balans tənliklərini birbaşa həll etmədən sistemin keyfiyyət göstəricilərini hesablamağa imkan verir və metodun yüksək dəqiqliyi aparılan çoxsaylı ədədi eksperimentlərlə təsdiq edilmişdir [7], [10], [12].

3. Bufer tutumu sonsuz olan kütləvi xidmət-ehtiyatlama sistemləri modellərinin tədqiqi üçün Neutsun matris-həndəsi üsulu tətbiq edilmişdir. Bu yanaşma əsasında sistemlərin uzunmüddətli stabil fəaliyyətini təmin edən erqodiklik şərtləri tapılmış və stasionar paylanmanın hesablanması üçün alqoritmik üsul yaradılmışdır. Alınmış erqodiklik şərtləri sistemin parametrləri əsasında asan yoxlanıla bilən asılılıqlarla ifadə edilir. Həmçinin, sistemin əsas keyfiyyət göstəricilərini təyin edən analitik düsturlar alınmışdır [1], [2], [3], [4].

4. Hər bir model üçün həm müştəri, həm də sistem meneceri nöqteyi-nəzərindən vacib olan əsas keyfiyyət və iqtisadi göstəricilərin hesablanması üçün aşkar düsturlar əldə edilmişdir. Bu düsturlar sistemin fəaliyyətinin operativ və iqtisadi cəhətdən hərtərəfli qiymətləndirilməsinə imkan vermişdir. Konkret olaraq, orta ehtiyat səviyyəsi, tələblərin itirilmə intensivliyi, orta gözləmə müddəti və ehtiyatların artırılması üçün verilən sifarişlərin orta intensivliyi kimi göstəricilərin hesablanması üçün düsturlar tapılmışdır [3], [4], [5], [6], [7], [9], [12].

5. Qurulmuş modellər əsasında ümumi xərclərin minimallaşdırılması məsələləri həll edilmişdir. Bu məqsədlə baxılan ehtiyat-artırma qaydalarının struktur parametrlərinin optimal qiymətləri tapılmış və sistem parametrlərinin keyfiyyət göstəricilərinə təsiri ədədi təcrübələr vasitəsilə ətraflı analiz edilmişdir. Həll edilən məsələlər ehtiyatların saxlanması və artırılması üçün sifarişlərin verilməsi və tələblərin itirilməsi ilə bağlı yaranan xərclər arasında sərfəli balansı təmin edən idarəetmə strategiyasını seçməyə imkan verir [3], [4], [7], [8], [11].

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakı elmi işlərdə dərc edilmişdir:

1. Мирзоев, Р. Об одной модели системы обслуживания-запасания с двумя источниками поставок // "Aviakosmik Məsələlərin Həllində Gənclərin Yaradıcı Potensialı" VII Beynəlxalq elmi-praktiki gənclər konfransının materialları (Fevral məruzələri-2022), – Bakı: Milli Aviasiya Akademiyası, – 2022. – c.57-59.
2. Mirzayev, R. A model of a queuing system with a base stock policy and two supply sources // Informatics and Control Problems, – 2022. Vol. 42, no. 1. – p.26-32.
3. Melikov, A., Mirzayev, R., Nair, S. Double sources queuing-inventory system with hybrid replenishment policy // Mathematics, – 2022. Vol. 10, no. 14: 2423. doi: doi.org/10.3390/math10142423
4. Melikov, A., Mirzayev, R., Nair, S. Numerical study of double source queuing-inventory systems with destructive customers // Journal of Computer and Systems Sciences International, – 2022. Vol. 61, no. 4. – p.581-598.
5. Меликов, А., Мирзоев, Р., Наир, С. Метод расчета характеристик системы обслуживания с гибридной политикой пополнения запасов от двух источников // Distributed Computer and Communication Networks (DCCN 2022): Proceeding of the XXV International Scientific Conference, – Moscow: – 2022. – c.143-149.
6. Мирзоев, Р. Численный анализ характеристик системы обслуживания-запасания с двумя источниками поставок // "Riyaziyyatın Fundamental Problemləri və İntellektual Texnologiyaların Təhsildə Tətbiqi" II Respublika Elmi Konfransının materialları, – Sumqayıt: SDU, – 2022. – c.205-209.
7. Melikov, A., Mirzayev, R., Sztrik, J. Double-Sources Queuing-Inventory Systems with Finite Waiting Room and Destructible Stocks // Mathematics, – 2023. Vol. 11, no. 1, 226. doi: doi.org/10.3390/math11010226
8. Mirzəyev, R. Ehtiyatları iki mənbədən doldurulan kütləvi xidmət-ehtiyatlama sisteminin optimallaşdırılması məsələsi haqqında // "Aviakosmik Məsələlərin Həllində Gənclərin Yaradıcı Potensialı" VIII Beynəlxalq elmi-praktiki gənclər konfransının materialları (Fevral məruzələri-2023), – Bakı: Milli Aviasiya Akademiyası, – 2023. – s.90-92.

9. Мирзоев, Р. Приближенное вычисление характеристик системы обслуживания-запасания с двумя источниками пополнения запасов // Milli Aviasiya Akademiyası, Elmi Məcmuə, – 2023. Cild 25, № 2. – c.18-26.
10. Mirzayev, R., Aliyeva, S. Model of Double-Source Queuing-Inventory System with a Finite Buffer under Hybrid Replenishment Policy // International Conference on Management and Control in Solving Engineering Problems (Macosep 2025), Baku: – 2025. – 5 p. doi: doi.org/10.30546/MaCoSEP2025.1356
11. Mirzayev, R. Optimal Cost Analysis in a Double-Source Queuing-Inventory System under Hybrid Replenishment Policy // Journal of Baku Engineering University – Mathematics and Computer Science, – 2025. Vol. 9, no. 1. – p.19-25.
12. Mirzayev, R.R., Aliyeva, S.H. Hybrid Replenishment Policy in a Dual-Source Queuing-Inventory System with Finite Buffer // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science, – 2026. №74. – p.71-80.

Həmmüəlliflərlə dərc olunmuş işlərdə iddiaçının şəxsi rolu:

[3], [4], [7] – proqram təminatının hazırlanması, modelin yoxlanılması, təhlilin aparılması, metodologiyanın hazırlanmasında iştirak, məqalənin redaktə və təkmilləşdirilməsi mərhələlərində iştirak.

[5] – stasionar ehtimalların və keyfiyyət göstəricilərinin hesablanması üçün dəqiq və təqribi düsturlardan istifadə etməklə proqram təminatının hazırlanması, ədədi eksperimentlərdə təqribi düsturlarının dəqiqliyinin qiymətləndirilməsi və nəticələrin emalı işlərini icrası.

[10], [12] – məsələnin qoyuluşu, düsturların riyazi çıxarılışı, hesablamaların yerinə yetirilməsi, nəticələrin əldə edilməsi və təhlili, həmçinin məqalənin əsas mətninin yazılması.

Dissertasiyanın müdafiəsi 27 noyabr 2026-cı il tarixində saat 14:00-da Azərbaycan Respublikasının Elm və Təhsil Nazirliyi İnformasiya Texnologiyaları İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən FD 1.35 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: Az 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küçəsi, 9a

Dissertasiya ilə Azərbaycan Respublikasının Elm və Təhsil Nazirliyinin İnformasiya Texnologiyaları İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Azərbaycan Respublikasının Elm və Təhsil Nazirliyinin İnformasiya Texnologiyaları İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat 23 oktyabr 2026-cı il tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb:
Kağız formatı: A5
Həcm: 37800 işarə
Tiraj: 100